نمایش اعداد در مبناهای متفاوت

(قسمت دوم)

سپیده چمن‌آرا

کلیدواژه‌ها: مبنا، ارزش مکانی، توان‌های اعداد.

در این شــماره از مجله نیز به طرح چند پرســش درباره‌ی نمایش اعداد در مبناهای مختلــف می‌پردازیم و تلاش می‌کنیم با استفاده از ارزش مکانی ارقام در هر مبنا، با سرعت بیش‌تری به آن پرسش‌ها پاسخ دهیم.

پیش از طرح پرسش‌ها بد نیست یادآوری کنم که ارزش مکانی در مبنای ۱۰، توان‌های ۱۰ است:

یکان=$۱۰^{۰}$	دهگان=$۱۰^{۱}$	صدگان=$۱۰^{۲}$	یکان هزار=$۱۰^{۳}$	دهگان هزار=$۱۰^{۴}$	...

(جدول ارزش مکانی در مبنای ۱۰)

و نیز یادآور شــویم که در هر مبنای عدد طبیعی $(n\rangle ۱)$، ارزش مکانی ارقام یک عدد در آن مبنا، از راســت به چپ، توان‌های n اســت که افزایش می‌یابد:

یکی‌ها=$n^{۰}$	$n^{۱}$ تایی	$n^{۲}$ تایی	$n^{۳}$ تایی	$n^{۴}$ تایی	$n^{۵}$ تایی	...

(جدول ارزش مکانی در مبنای n)

اینک پرسش‌ها را مطرح می‌کنیم:

پرســش ۱: نمایــش عــدد ۸۱ در مبنــای ۳ چیســت؟ یعنــی $۸۱=(?)_{۳}$

پاسخ: طبیعی است که به سراغ تقسیم‌های متوالی برویم تا بفهمیم ۸۱ را در مبنــای ۳ چگونه نمایش می‌دهند. ولی اگر توان‌های ۳ را حفظ باشیم، یادمان می‌آید که $۳^{۴}=۸۱$، پس فوری در جدول ارزش مکانی در مبنای ۳ می‌نویسیم:

$۳^{۰}$	$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$
۰	۰	۰	۰	۱

یعنی $۸۱=(۱۰۰۰۰)_{۳}$

پرسش بعدی نیز مشابه پرسش ۱ است.

پرسش ۲: نمایش ۱۲۸ در مبنای ۲ چیست؟

پاســخ: بدون این‌که به سراغ تقسیم‌های متوالی بریم، یادمان باشد که $۲^{۷}=۱۲۸$، پس در جدول ارزش مکانی ۲ داریم:

$۲^{۰}$	$۲^{۱}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$	$۲^{۴}$	$۲^{۵}$	$۲^{۶}$	$۲^{۷}$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱

یعنی:

$۱۲۸=(۱۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$

آیــا از پاســخ ایــن دو پرســش، رابطــه‌ی جدیــد دیگری کشــف نکرده‌اید؟

بله درســت اســت. در پرســش ۱ که $۳^{۴}=۸۱$ بود، نمایش آن شد کوچک‌ترین عدد پنج رقمی در مبنای ۳، یعنی زاویه ۱ با ۴ تا صفر جلوی آن: $(۱۰۰۰۰)_{۳}=۸۱$، چون ارزش مکانی از $۳^{۰}$ شروع می‌شود، لذا $۳^{۴}$ در مکان پنجم جدول قرار می‌گیرد. به دلیل مشابه، نمایش $۱۲۸=۲^{۷}$ شد یک ۱ با ۷ تا صفر جلو آن، یعنی کوچک‌ترین عدد ۸ رقمی در مبنای ۲: $۱۲۸=(۱۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$

حال که این رابطه را متوجه شدید، سریع بگویید.

پرسش ۳: $۶۲۵=(?)_{۵}$

پاسخ: $۵^{۴}=۶۲۵$، پس $(۱۰۰۰۰)_{۵}=۶۲۵$

پس بد نیست قبل از ادامه‌ی این مقاله، یک جدول توان برای اعداد ۱ تا ۱۰ برای خودتان درست کنید تا با کمک آن، سریع‌تر بتوانید به این پرســش‌ها پاسخ دهید. اگر قسمتی از آن را حفظ کنید که خیلی بهتر است!

پرسش ۴: نمایش عدد ۸۰ در مبنای ۳ چیست؟

پاســخ: گرچه ۸۰، هیچ توانی از ۳ نیســت، ولی از ۸۱، یکی کم‌تر است. پس چون $۸۱=(۱۰۰۰۰)_{۳}$، یعنی کوچک‌ترین عدد پنج رقمی در مبنای ۳ اســت، ۸۰ باید بزرگ‌ترین عدد چهار رقمی در مبنای ۳ باشد، یعنی:

$$۸۰=(۲۲۲۲)_{۳}$$

(یادتان باشد بزرگ‌ترین رقم در مبنای ۳، رقم ۲ بود!)

پرسش ۵: نمایش ۱۲۷ در مبنای ۲ چیست؟

$۱۲۸=۲^{۷}=(۱۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$ $۱۲۷=(۱۱۱۱۱۱۱)_{۲}$

پرسش ۶: نمایش ۶۳ در مبنای ۴ چیست؟

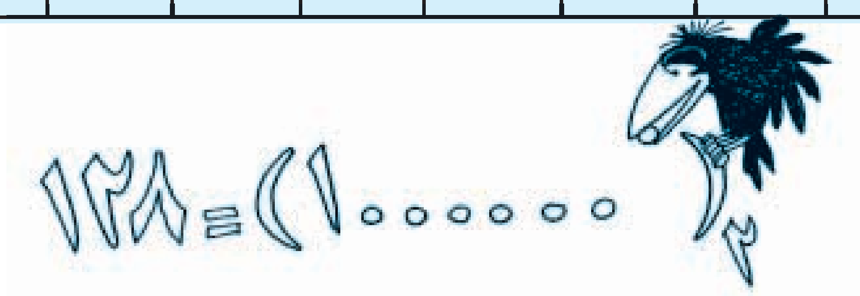
چون $۴^{۳}=۶۴$، پس $(۱۰۰۰)_{۴}=۶۴$ ؛ لذا $(۳۳۳)_{۴}=۶۳$

احتمالاً ســه پرســش اخیر را در مدتِ خیلی کوتاهی پاسخ دادید، ولی اگر می‌خواســتید با تقسیم‌های متوالی به پاسخ برسید، خیلی خیلی بیش‌تر طول می‌کشید! فقط باید جدول توان را دم دست یا در ذهن داشته باشید!

پرســش ۷: حاصل جمــع ۶۴+ ۱۲۸ در مبنای ۲ چگونه نمایش داده می‌شود؟

جدول توان‌های اعداد ۱ تا ۱۰ (تا توان دهم) (خودتان این جدول را با کمک ماشین حساب، کامل کنید!)

توان / پایه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	$۲^{۲}=۴$	$۲^{۳}=۸$	$۲^{۴}=۱۶$	$۲^{۵}=۳۲$	$۲^{۶}=۶۴$	$۲^{۷}=۱۲۸$	$۲^{۸}=...$	......	....
۳	$۳^{۲}=۹$	$۳^{۳}=۲۷$	$۳^{۴}=۸۱$	....	....				
۴	$۴^{۲}=۱۶$	$۴^{۳}=۶۴$	$۴^{۴}=۲۵۶$	....					
۵									
۶									
۷									
۸									
۹									
۱۰									



پاسخ: احتمالاً متوجه شده‌اید که هر دو عدد ۶۴ و ۱۲۸، توان‌هایی از ۲ هستند. پس بدون این‌که به سراغ جمع زدن آن‌ها و سپس تقسیم کردن‌های متوالی برویم، از جدول ارزش مکانی ۲ استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۶۴=۲^{۶} \\ ۱۲۸=۲^{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$۲^{۷}$	$۲^{۶}$	$۲^{۵}$	$۲^{۴}$	$۲^{۳}$	$۲^{۲}$	$۲^{۱}$	$۲^{۰}$
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
+	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰

$(۱۱۰۰۰۰۰۰)_{۲}=۱۲۸+۶۴$

جمع انجام شد!

پرسش ۸: عدد ۶۶ در مبنای ۴ چگونه نوشته می‌شود؟

پاسخ: باز هم یاد توان‌های ۴ می‌افتیم. ۶۶ توانی از ۴ نیست ولی از $۶۴=۴^{۳}$، ۲ واحد بیش‌تر است. پس

$۴^{۳}$	$۴^{۲}$	$۴^{۱}$	$۴^{۰}$
۱	۰	۰	۰
+			۲

$۶۶=(۱۰۰۲)_{۴}$

(توجه کنید که ۲، رقمی مجاز در مبنای ۴ است و $(۲)_{۴}=۲$).

پرسش ۹: عدد بعد از $(۳۳۳)_{۴}$ در مبنای ۲ چگونه نوشته می‌شود؟

پاسخ: توجه کنید که $(۳۳۳)_{۴}$، بزرگ‌ترین عدد سه رقمی در این مبناست. پس عدد بعدی آن، کوچک‌ترین عدد چهار رقمی، یعنی $(۱۰۰۰)_{۴}$ است. این هم یعنی $۴^{۳}$، یا به عبارتی $۲^{۶}$ (زیرا $۲^{۶}=(۲^{۲})^{۳}=۴^{۳}$). پس نمایش آن در مبنای ۲، چنین است: $(۱۰۰۰۰۰۰)_{۲}$. یعنی به طور خلاصه:

$$(۳۳۳)_{۴}+۱=(۱۰۰۰۰۰۰)_{۲}$$

پرسش ۱۰: اختلاف ۱۵۰ و ۱۲۵ در مبنای ۵ چگونه نوشته می‌شود؟

پاسخ: $۱۵۰-۱۲۵=۲۵$

$۲۵=۵^{۲}$

پس $۱۵۰-۱۲۵=(۱۰۰)_{۵}$

پرسش ۱۱. اختلاف ۱۲۷ و ۱۲۹ در مبنای ۵ است، پس

$۱۲۹-۱۲۷=۲$

و چون ۲، رقمی مجاز در مبنای ۵ است، پس

$۱۲۹-۱۲۷=(۲)_{۵}$

حال شما یک پرسش مشابه مطرح کنید که با استفاده از ارزش مکانی، توان‌های اعداد و ارتباط آن‌ها با هم، بتوان به سرعت به آن پاسخ داد:

پرسش ۱۲: ....

موفق باشید.