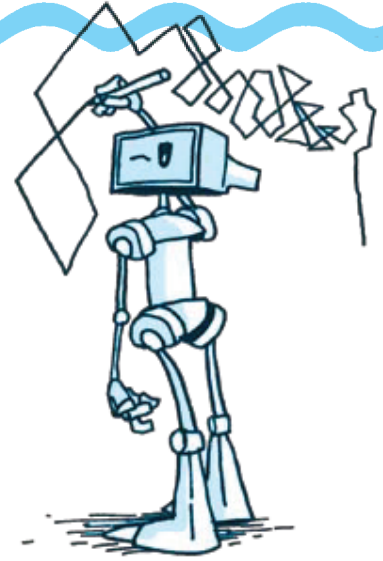


معادله



حسن باطنی

معادله‌های چند مجهولی

فرض کنید علی و احمد روی هم ۱۸ تومان داشته باشند. واضح است که چون نه مقدار پول علی را می‌دانیم و نه مقدار پول احمد را، پس مسئله جواب‌های متعددی می‌تواند داشته باشد. اگر مقدار پول علی را x و مقدار پول احمد را y بنامیم، داریم:

$$18 = \text{مقدار پول احمد} + \text{مقدار پول علی (تومان)}$$

$$x + y = 18$$

این معادله که در آن دو حرف x و y به کار رفته‌اند، «دومجهولی» می‌نامیم. اگر $x=10$ و $y=8$ باشد، معادله به صورت $10+8=18$ درمی‌آید که یک تساوی درست است.

اما اگر $x=14$ و $y=6$ باشد، معادله به صورت $14+6=18$ درمی‌آید که نادرست است؛ زیرا $14+6=20$ است.

به غیر از جواب $x=10$ و $y=8$ معادله جواب‌های دیگری هم دارد. برای مثال:

$$x=1, y=17$$

$$x=2, y=16$$

...

تمرین ۱. آیا می‌توانید سه جواب دیگر معادله‌ی فوق را

بنویسید:

$$۱) x = \dots, y = \dots$$

$$۲) x = \dots, y = \dots$$

$$۳) x = \dots, y = \dots$$



ما در حل بسیاری از مسائل به تساوی‌هایی برمی‌خوریم که در آن‌ها یک یا چند جزء مجهول وجود دارد. برای مثال به این مسئله توجه کنید:

- اگر علی ۲۳ تومان از پدرش بگیرد، ۷۱ تومان خواهد داشت. در حال حاضر او چه قدر پول دارد؟

خلاصه‌ی مسئله را در تساوی زیر مشاهده می‌کنید:

$$71 = 23 + \text{پول کنونی علی}$$

(تومان) (تومان)

در این مسئله هدف ما مشخص کردن مقدار پول کنونی علی است. برای ساده‌تر شدن تساوی بالا، به جای «پول کنونی علی» از حرف x استفاده می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x + 23 = 71$$

که در آن x مقدار پول کنونی علی است. به تساوی $x + 23 = 71$ معادله می‌گوییم.

برای حل کافی است این معادله را حل می‌کنیم.

در معادله‌ی $x + 23 = 71$ ، اگر $x = 48$ باشد، معادله به صورت $48 + 23 = 71$ درمی‌آید که گزاره‌ای درست است و تساوی برقرار خواهد بود. اما اگر $x = 50$ باشد، خواهیم داشت: $50 + 23 = 71$ و تساوی برقرار نمی‌شود، زیرا $50 + 23$ برابر است با ۷۳.

معادله، یک تساوی است که در آن یک یا چند حرف یا مجهول وجود دارد و تساوی به ازای بعضی از مقادیر آن حرف یا حروف برقرار است.

تساوی $x + 23 = 71$ فقط به ازای $x = 48$ برقرار است. بنابراین ۴۸ را جواب معادله و $\{48\}$ را «مجموعه‌ی جواب معادله» می‌نامیم. مجموعه‌ی جواب معادله شامل تمام مقادیری است که با قرار دادن آن‌ها به جای مجهول معادله، یک تساوی درست حاصل می‌شود.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned}
 x + y &= 10 \Rightarrow x = 10 - y && \text{قرینه } -y \\
 165 - x &= y \Rightarrow 165 = y + x && \text{قرینه } +x \\
 x + 83 &= 149 \Rightarrow x = 149 - 83 && \text{قرینه } -83 \\
 x - 31 &= 75 \Rightarrow x = 75 + 31 && \text{قرینه } +31
 \end{aligned}$$

با توجه به مثال‌های بالا، این دستور مهم را می‌توان نتیجه

گرفت:

دستور ۱: در هر تساوی می‌توان یک مقدار قرینه کرد و به طرف دیگر تساوی انتقال داد.

اکنون به حل چند معادله می‌پردازیم:

مثال ۱. معادله‌ی $x + 13 = 40$ را حل کنید.

حل: با توجه به دستور ۱ ابتدا مقدار $+13$ را قرینه می‌کنیم و

به طرف دیگر تساوی انتقال می‌دهیم:

$$x + 13 = 40$$

در نتیجه تساوی زیر به دست می‌آید:

$$x = 40 - 13$$

و با محاسبه‌ی طرف راست تساوی خواهیم داشت:

$$x = 27$$

$x = 27$ جواب معادله است. یعنی تساوی $x + 13 = 40$ به ازای $x = 27$

برقرار خواهد بود. می‌توانید این مطلب را با قرار دادن 27 به جای x

در معادله، امتحان کنید تا به جواب خود مطمئن شوید:

$$\begin{aligned}
 x + 13 &= 40 \\
 \downarrow \\
 27 + 13 &= 40
 \end{aligned}$$

مثال ۲. معادله‌ی $x - 51 = 30$ را حل کنید.

حل: با توجه به دستور ۱ داریم:

$$\begin{aligned}
 x - 51 &= 30 \\
 x &= -30 + 51
 \end{aligned}$$

با محاسبه‌ی طرف راست تساوی خواهیم داشت:

$$x = 21$$

این جواب را امتحان کنید.

اکنون مسئله‌ی زیر را با تشکیل معادله حل می‌کنیم.

- اگر محمد ۱۶ تومان به برادرش بدهد، ۴۱ تومان برایش باقی

می‌ماند. محمد چه قدر پول دارد؟

مشاهده می‌شود که معادله‌ی $x + y = 18$ جواب‌های زیادی دارد.

پس هر معادله با توجه به تعداد مجهولاتش، می‌تواند یک جواب، یا چند جواب و یا بی‌شمار جواب داشته باشد.

تمرین ۲. هر یک از معادله‌های زیر چند مجهولی هستند.

الف) $2x + y = 10$... مجهولی

ب) $x + y + 3z = 16$... مجهولی

منظور از حل یک معادله، یافتن مجموعه‌ی جواب‌های آن

معادله است. یعنی پیدا کردن مقادیری برای مجهول یا مجهول‌های

معادله که معادله به ازای آن‌ها برقرار باشد؛ یعنی تساوی درست

حاصل شود.

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$15 - 6 = 9 \quad (1)$$

$$15 = 9 + 6 \quad (2)$$

با مقایسه‌ی این دو تساوی، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ چگونه

از تساوی ۱ می‌توان به تساوی ۲ رسید؟ در واقع اگر به دو طرف

هر تساوی یک مقدار معین و برابر اضافه یا کم کنیم. تساوی باز هم

برقرار است. حال به دو طرف رابطه‌ی ۱ عدد $+6$ را اضافه کنید. چه

اتفاقی می‌افتد؟ بله درست است، تساوی ۲ به دست می‌آید.

چنین به نظر می‌رسد که عدد -6 در تساوی ۱ قرینه شده و به

طرف دیگر تساوی انتقال یافته است؛ بدین صورت:

$$\begin{aligned}
 15 - 6 &= 9 \\
 15 &= 9 + 6
 \end{aligned}$$

در واقع عمل تفریق $15 - 6 = 9$ و عمل جمع $15 = 9 + 6$ و عمل

جمع $15 = 9 + 6$ متناظرند.

اکنون جمع متناظر با تفریق زیر را بنویسید:

$$37 - 12 = 25 \Rightarrow \dots = \dots + \dots$$

حال به دو تساوی زیر توجه کنید:

$$13 + 8 = 21 \quad (1)$$

$$13 = 21 - 8 \quad (2)$$

با مقایسه‌ی این دو تساوی، مشاهده خواهید کرد که عدد $+8$

در تساوی ۱ قرینه شده و به طرف دیگر تساوی انتقال یافته است؛

به صورت زیر:

$$\begin{aligned}
 13 + 8 &= 21 \\
 13 &= 21 - 8
 \end{aligned}$$

عمل تفریق متناظر با جمع زیر را بنویسید:

$$52 + 16 = 68 \Rightarrow \dots = \dots - \dots$$

حل: اگر از پول محمد ۱۶ تومان کم شود، ۴۱ تومان برایش می ماند. یعنی:

$$۱۶ = ۴۱ - \text{مقدار پول محمد}$$

(تومان) (تومان) (تومان)

با قرار دادن حرف x به جای «مقدار پول محمد» داریم:
 $x - ۱۶ = ۴۱$

با حل این معادله مقدار x که همان مقدار پول محمد است به دست خواهد آمد.

$$x - ۱۶ = ۴۱ \Rightarrow x = ۴۱ + ۱۶ \Rightarrow x = ۵۷$$

(تومان) مقدار پول محمد

شاید فکر کنید که این مسئله را بدون تشکیل معادله نیز می توان حل کرد. درست است، اما مسائل بسیاری وجود دارند که حل آنها بدون تشکیل معادله، بسیار مشکل یا غیرممکن است. لذا لازم است برای کسب مهارت در حل این گونه مسئله ها، از مسائل ساده تر آغاز کنید و چگونگی تشکیل معادله را خوب فراگیرید.

به تساوی های زیر توجه کنید:

$$\begin{array}{r} \text{عمل ضرب} \quad ۵ \times ۱۲ = ۶۰ \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{عمل تقسیم} \quad ۱۲ = ۶۰ \div ۵ \end{array}$$

این دو عمل ضرب و تقسیم متناظرند. تساوی زیر را کامل کنید:

$$۱۴ \times ۶ = ۸۴ \Rightarrow ۶ = \dots \div \dots$$

به مثال های زیر توجه کنید:

$$۵ \times x = ۶۰ \Rightarrow x = ۶۰ \div ۵$$

$$\frac{۲}{۳} \times x = ۸ \Rightarrow x = ۸ \div \frac{۲}{۳}$$

مطلب فوق را می توان در حالت کلی به صورت دستور زیر بیان کرد:

دستور ۲. هرگاه $ax=b$ باشد، آن گاه $x = b \div a$ به شرط آن که $a \neq 0$



مثال ۳. معادله ی $۵x=۶۰$ را حل کنید.

حل: با توجه به دستور ۲ خواهیم داشت:

$$۵x = ۶۰ \Rightarrow x = ۶۰ \div ۵$$

با محاسبه ی تقسیم در طرف راست تساوی اخیر داریم:

$$x = ۱۲$$

۱۲ جواب معادله است. با قرار دادن $x=۱۲$ در معادله ی $۵x=۶۰$

می توانید درستی این جواب را بررسی کنید.

مثال ۴. معادله ی $\frac{۳}{۷}x = ۲۴$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{۳}{۷}x = ۲۴ \Rightarrow x = ۲۴ \div \frac{۳}{۷}$$

و با محاسبه ی تقسیم، در سمت راست تساوی داریم:

$$x = ۲۴ \times \frac{۷}{۳} \Rightarrow x = ۵۶$$

مثال ۵. مسئله ی زیر را با تشکیل معادله حل کنید:

در $\frac{۱۳}{۲۴}$ گنجایش ظرفی ۵۲ لیتر آب جای می گیرد. گنجایش

ظرف چه قدر است؟

حل: با توجه به صورت مسئله « $\frac{۱۳}{۲۴}$ گنجایش

ظرف = ۵۲ لیتر»

این مطلب را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{۱۳}{۲۴} = ۵۲ \text{ گنجایش ظرف (لیتر)}$$

با قراردادن حرف x به جای گنجایش ظرف داریم:

$$\frac{۱۳}{۲۴}x = ۵۲$$

با حل این معادله، مقدار x که همان «گنجایش ظرف» است،

$$\frac{۱۳}{۲۴}x = ۵۲ \Rightarrow x = ۵۲ \div \frac{۱۳}{۲۴}$$

به دست می آید:

$$\Rightarrow x = 52 \times \frac{24}{13}$$

$$\Rightarrow x = 96$$

گنجایش ظرف (لیتر)

با توجه به دستورهای ۱ و ۲ به حل چند مثال دیگر

می پردازیم:

مثال ۶. معادله ی $۵x+۲=۳۷$ را حل کنید.

حل: ابتدا با توجه به دستور ۱ خواهیم داشت:

$$5x + 2 = 37$$

$$5x = 37 - 2 \Rightarrow 5x = 35$$

سپس با استفاده از دستور ۲ مقدار x را به دست می آوریم:

$$5x = 35 \Rightarrow x = 35 \div 5 \Rightarrow \boxed{x = 7}$$

مثال ۷. معادله $1 = -\frac{x}{3} + \frac{4}{5}$ را حل کنید.

حل: با توجه به دستور ۱ داریم:

$$-\frac{x}{3} + \frac{4}{5} = 1$$

$$-\frac{x}{3} = 1 - \frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{x}{3} = \frac{1}{5}$$

تساوی اخیر را به صورت زیر می توان نوشت:

$$-\frac{1}{3}x = \frac{1}{5}$$

و آن گاه با استفاده از دستور ۲ مقدار x را به دست می آوریم:

$$x = \frac{1}{5} \div \left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{3}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{5}}$$

مثال ۸. مریم ۱۴۰ ریال داشت. با این پول ۱۲ مداد خرید و ۸

ریال از پولش باقی ماند. قیمت هر مداد چه قدر است؟

حل: با توجه به صورت مسئله داریم:

$$140 = 8 + (\text{قیمت یک مداد}) \times 12$$

(ریال) (ریال) (ریال)

«قیمت یک مداد» را «x» در نظر می گیریم:

$$12x + 8 = 140$$

با حل این معادله مقدار x یعنی قیمت یک مداد به دست

$$12x = 140 - 8 \Rightarrow 12x = 132$$

$$\Rightarrow x = 132 \div 12$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 11}$$

(ریال) قیمت یک مداد

مثال ۹. اگر از ۴ برابر عددی ۵ واحد کم کنیم، عدد ۱۱۹ حاصل

می شود. آن عدد چند است؟

حل: با توجه به صورت مسئله داریم:

$$4x - 5 = 119$$

$$4x = 119 + 5$$

$$\Rightarrow 4x = 124 \Rightarrow x = 124 \div 4$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 31}$$

برای حل معادله ی

$$9 + 3x - 11 + 5x + 8 = 4x - 7 - x$$

چه باید کرد؟ x چه مقداری باشد تا تساوی بالا برقرار شود؟

نحوه ی عملکرد بدین صورت است که ابتدا تمام یک جمله ای های

سمت راست تساوی را که شامل حرف x هستند، با توجه به دستور

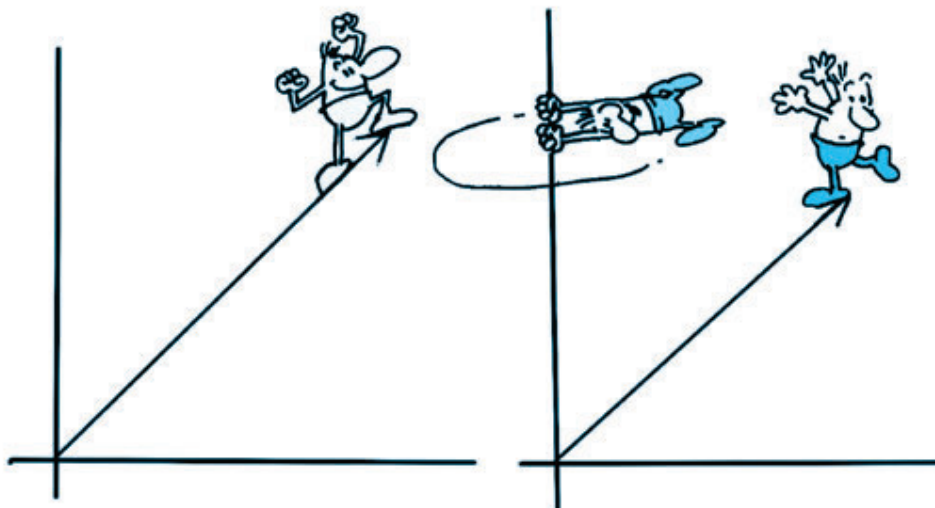
۱ به سمت چپ تساوی انتقال می دهیم. سپس تمام اعداد سمت

چپ تساوی را با توجه به دستور ۱، به سمت راست تساوی منتقل

می کنیم:

$$9 + 3x - 11 + 5x + 8 = 4x - 7 - x$$

-۹ قرینه +۱۱ قرینه -۸ قرینه
 +۳ قرینه -۴ قرینه +۱ قرینه
 -۴ قرینه +۳ قرینه



تمرین ۴. علی $\frac{2}{3}$ پولش را برای خرید کتاب و $\frac{1}{4}$ پولش را برای خرید دفتر اختصاص داده و ۱۴ تومان برایش باقی مانده است. کل پول علی چه قدر است؟

راهنمایی: اگر کل پول علی را x فرض کنیم، داریم:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + 14 = x$$

تمرین ۵. مجموع ۴ عدد متوالی ۱۱۰ است این چهار عدد را بیابید.

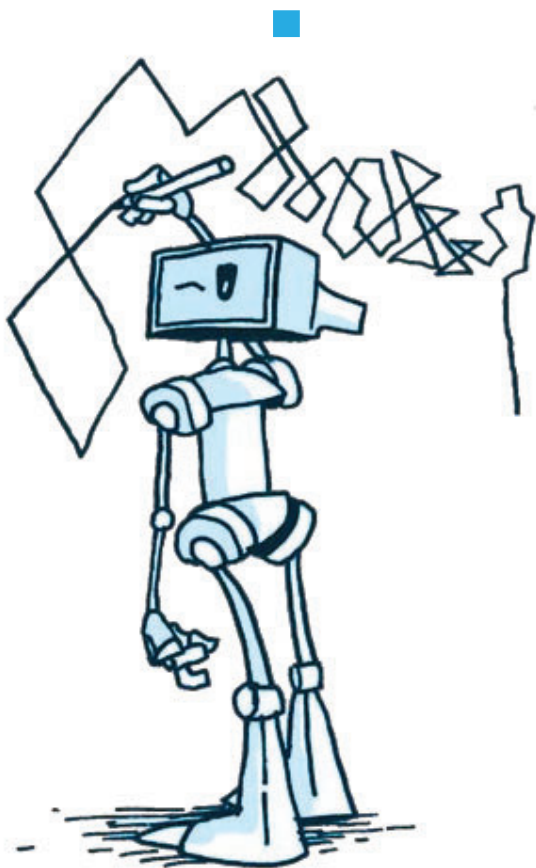
راهنمایی: عدد کوچکتر را x در نظر بگیرید. این چهار عدد، x ، $x+1$ ، $x+2$ و $x+3$ خواهند بود؛ پس:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 110$$

با حل معادله مقدار x به دست می آید.

تمرین ۶. سن ۴ سال بعد احمد از ۳ برابر ۸ سال پیش او ۶ سال کمتر است. سن کنونی احمد چه قدر است؟

راهنمایی: سن کنونی احمد را x فرض می کنیم. سن ۴ سال بعد او $x+4$ و سن ۸ سال پیش او $x-8$ خواهد بود و معادله ی مورد نظر $6 + 3(x-8) = x+4$ است. با حل معادله مقدار x یعنی سن کنونی احمد به دست می آید. می توانید جواب را امتحان کنید.



$$3x + 5x - 4x + x = -7 - 9 + 11 - 8$$

پس از ساده کردن داریم: $5x = -13$

$$x = -\frac{13}{5}$$

تمرین ۳. معادله های زیر را حل کنید:

$$1) \frac{2}{3}x - x + 20 = 9x - 8$$

$$2) x + 2x + 3x + 4x = 5x + 6x - 7$$

$$3) \frac{2}{5}x - 10 + x + \frac{2}{6} = -x + \frac{5}{1}$$

بیان این مطلب لازم است که معادله ها شکل های متفاوت دیگری هم دارند که در این جا فقط به بیان چند تمرین و راهنمایی مختصر اکتفا می کنیم و تحقیق در یافتن راه حل را به عهده ی دانش آموزان می گذاریم:

$$1) 2^x \times 8 = 128$$

راهنمایی: تساوی را به $2^7 = 2^x \times 2^3$ تبدیل کنید و ...

$$2) \frac{2x+5}{3x-1} = \frac{3}{4}$$

راهنمایی: با توجه به این که حاصل ضرب طرفین برابر است با حاصل ضرب وسطین، خواهیم داشت:

$$3 \times (3x-1) = 4 \times (2x+5)$$

با انجام ضرب و ساده کردن مقدار x به دست می آید:

$$3) 5^{2x+1} \times 25 = 5^{x+7}$$

راهنمایی:

$$5^{2x+1} \times 5^2 = 5^{x+7}$$

$$5^{2x+1+2} = 5^{x+7}$$

چون پایه ها مساوی هستند، توان ها باید مساوی باشند.

$$4) \frac{7}{5x-1} = \frac{-4}{-3x+8}$$

راهنمایی: مانند تمرین ۲،

$$5) \frac{4}{4x-3} + \frac{14}{9} = 2$$

راهنمایی: $\frac{+14}{9}$ را با توجه به دستور به طرف دیگر انتقال دهند و با محاسبه ی سمت راست تساوی و راهنمایی تمرین ۲ به جواب برسید.

$$6) \frac{2}{3} \div x = \frac{8}{15}$$

راهنمایی: به دو تقسیم زیر توجه کنید:

$$20 \div 4 = 5 \quad 20 \div 5 = 4$$

حالا از تقسیم بالا تقسیم دیگری را نتیجه بگیرید و مقدار x را به دست آورید.