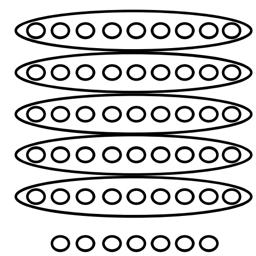
جمع و تفریق در مبناهای متفاوت

سپیده چمن‌آرا

◀ آیا می‌دانید حاصل ۲۴+۵۷ چه‌قدر می‌شود؟
معلوم است که می‌دانید! این چه سؤالی است که می‌پرسم؟!
اما اگر عبارت بالا با تغییر کوچکی، به‌صورت:

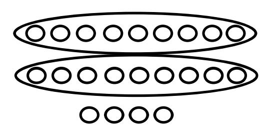
$$(۵۷)_{۹}+(۲۴)_{۹}$$

بنویسیم، چه‌طور؟ اصلاً یعنی این عبارت چیست؟
دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم راهنمایی می‌دانند که در عبارت بالا، اعدادی را در مبنای شمارشِ ۹ نوشته‌ایم و قصد داریم حاصل جمع آن‌ها را بیابیم. یعنی مقداری را که در مبنای ۹، به‌صورت $(۵۷)_{۹}$ نوشته می‌شود، به مقداری بیفزاییم که در همین مبنا به‌صورت $(۲۴)_{۹}$ نوشته می‌شود. بد نیست یادآوری کنیم $(۵۷)_{۹}$، یعنی ۵تا بسته‌ی ۹تایی با ۷تا یکی؛ یعنی ۷+(۹×۵) یا ۵۲ تا (شکل ۱).



شکل ۱. مقدار $(۵۷)_{۹}$

به همین ترتیب، $(۲۴)_{۹}$ یعنی ۲ تا بسته‌ی ۹تایی با ۴ تا یکی که می‌شود: ۴+(۹×۲)، یعنی ۲۲ تا (شکل ۲).

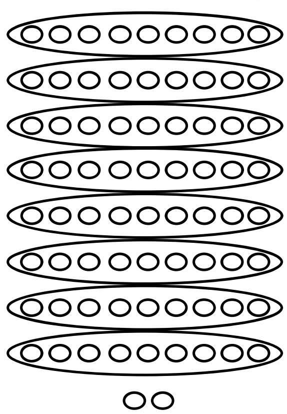


شکل ۲. مقدار $(۲۴)_{۹}$

حالا دیگر معلوم است که:

$$(۵۷)_{۹}+(۲۴)_{۹}=۵۲+۲۲=۷۴$$

یعنی اگر $(۵۷)_{۹}$ را به $(۲۴)_{۹}$ بیفزاییم، روی هم ۷۴ شیء داریم. اما اگر بخواهیم حاصل را نیز در مبنای ۹ بیان کنیم، چه؟ طبیعی است که باید ببینیم در ۷۴تا، چند بسته‌ی ۹تایی داریم. از روی شکل‌های ۱ و ۲ معلوم است که روی هم ۷تا بسته‌ی ۹تایی و ۱۱تا شیء یکی داریم. اما از ۱۱ شیء نیز می‌توان یک بسته‌ی ۹تایی دیگر جدا کرد و ۲ شیء یکی می‌ماند. یعنی روی هم ۸تا بسته‌ی ۹تایی و ۲تا یکی داریم (شکل ۳).



شکل ۳. دسته‌بندی ۷۴ شیء به دسته‌های ۹تایی برای بیان آن در مبنای ۹

البته با تقسیم زیر نیز همین نتیجه می‌رسیدیم:

۷۴ | ۹
۷۲   ۸ ← تعداد بسته‌های ۹تایی
۲ ← تعدادی اشیای تکی

سپس حاصلِ عبارتِ $(۲۴)_{۹}+(۵۷)_{۹}$ می‌شود: $(۸۱)_{۹}$. این کار درست مانند آن است که برای حرف زدن در مورد تعدادهای متفاوت و مجموع آن‌ها روی هم، زبان جدیدی یاد گرفته باشیم. البته طی کردن این مراحل برای یافتن حاصل عبارت در مبنای دیگری غیر از مبنای شمارشِ عادی ما که مبنای ده‌هی است، کمی طولانی و خسته‌کننده به‌نظر می‌رسد، ولی اگر قدری خوب فکر کنیم، می‌بینیم

که خیلی سریع‌تر و بدون ترجمه‌ی معنی عبارت‌های (۵۷)$_{۹}$ و (۲۴)$_{۹}$ به مبنای عادی خودمان و جمع زدن عادی و سپس دوباره ترجمه‌ی حاصل جمع به مبنای ۹، می‌توانستیم در همان مبنای ۹، حاصل‌جمع را به سرعت بیابیم. کافی است قدری عمیق‌تر به مفهوم مبناها و اصول حاکم بر عددنویسی در آن‌ها بیندیشیم.

همان‌طور که در مبنای عادیِ ده‌دهی، برای جمع اعداد را زیر هم می‌نویسیم تا تعداد دسته‌های مشابه را روی هم پیدا کنیم، در هر مبنای دیگری نیز می‌توانیم این کار را انجام دهیم. همچنین، همان‌طور که هرگاه در جمعِ عادی، حاصل‌جمعِ تعداد یک ارزش مکانی، از ۱۰ تا بیشتر می‌شود، دسته‌های ۱۰تایی ایجاد شده را به مرتبه‌ی بالاتر انتقال می‌دهیم، در هر مبنایی نیز متناسب با مبنای موردنظر، می‌توانیم این کار را انجام دهیم. بگذارید منظورم را با همان مثال (۲۴)$_{۹}$+(۵۷)$_{۹}$ روشن‌تر بیان دارم.

نخست این اعداد را طوری زیر هم می‌نویسم که اعداد با ارزش مکانی یکسان زیر هم قرار گیرند. برای راحتی کار، از جدولِ ارزش مکانی در مبنای ۹ استفاده می‌کنم:

	۱	
	۵	۷
+	۲	۴
	۸	۲

حال برای یافتن حاصل جمع، از سمت راست شروع می‌کنیم: ۷تا یکی با ۴ تا یکی می‌شود ۱۱تا یکی. منتها در ۱۱تا، ۱ بسته‌ی ۹تایی هست و ۲تا یکی می‌ماند: (انتقال)

سپس حاصل جمع ۱ با ۵ و ۲ را که می‌شود ۸، زیر تعداد بسته‌های ۹تایی می‌نویسیم.

دیدید چه سریع به همان جوابِ (۸۱)$_{۹}$ رسیدیم؟! حال شما امتحان کنید. بیایید باهم حاصلِ

(۱۷۵)$_{۹}$ +(۶۳۲)$_{۹}$

را در همان مبنای ۹ بیابیم.

نگران نشوید! عددها سه‌رقمی هستند، ولی هیچ جای نگرانی نیست. آن‌ها را در جدول ارزش مکانی زیر هم می‌نویسیم و از کوچک‌ترین مرتبه (یکی‌ها) که در سمت راست قرار دارد، جمع را آغاز می‌کنیم:

۸۱تایی	۹تایی	یکی
۱	۷	۵
۶	۳	۲
۷	۱۰	۷

صبر کنید! هنوز کار تمام نشده است. ما در مبنای ۹، رقمِ «۱۰» نداریم! اما در ۱۰تا، ۱ بسته‌ی ۹تایی هست که به مرتبه‌ی بالاتر انتقال می‌یابد و یک دانه می‌ماند:

۸۱تایی	۹تایی	یکی
۱	۷	۵
۶	۳	۲
۷	۱۰	۷
۸	۱	۷

پس حاصلِ جمع برابر است با (۸۱۷)$_{۹}$.

اگر بخواهیم در مبنای دیگری به جز مبنای ۹ یا ۱۰ کار کنیم، کافی است حواسمان را خوب جمع کنیم تا هر وقت تعداد یک ارزش مکانی از مبنای موردنظر بیشتر شد، با دسته‌بندی مجدد و انتقال دسته‌های بزرگ‌تر به مرتبه‌های بالاتر، آن را به صورت صحیح بنویسیم. بیایید حاصلِ عبارت زیر را در مبنای ۳ بیابیم.

(۱۲۱۱)$_{۳}$+(۲۰۲)$_{۳}$+(۱۲۰)$_{۳}$

می‌بینید که هم مبنای شمارش عوض شده است، هم باید سه عدد را جمع کنیم و هم این‌که یکی از اعداد، چهاررقمی است. اما هیچ ترسی ندارد! آن‌ها را در جدول ارزش مکانی مبنای ۳ زیر هم می‌نویسیم و از سمت راست شروع می‌کنیم. فقط حواسمان هست که هر وقت تعداد، ۳تا بیشتر شد، تعداد دسته‌های ۳تایی را به مرتبه‌ی بعدی انتقال دهیم:

۲۷تایی	۹تایی	۳تایی	یکی
	۱	۲	۰
	۲	۰	۲
۱	۲	۱	۱
۱	۵	۳	۳
۱	۵	۴	۰
۱	۶	۱	۰
۳	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰

وای! رقم‌های ۳ و۵ در مبنای ۳ نداریم! در اولین ۳ یک دسته‌ی ۳تایی است که به مرتبه‌ی بعدی منتقل می‌شود و ۵ تا یکی می‌ماند

در ۶ شیء، ۲ تا دسته‌ی ۳ تایی هست که به مرتبه‌ی بعدی می‌رود و ۵ تا یکی می‌ماند.

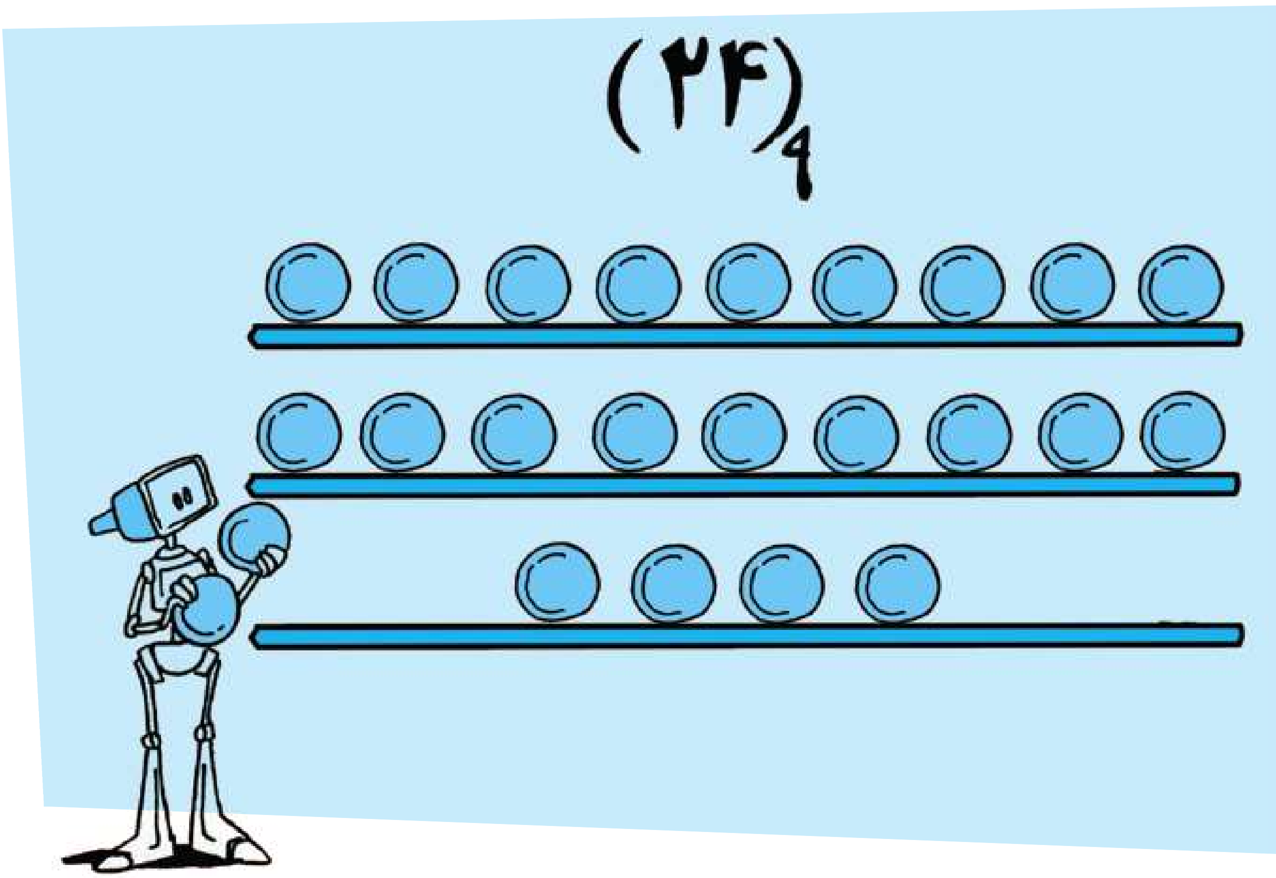
در ۴ شیء، یک دسته‌ی ۳ تایی داریم که به مرتبه‌ی بعدی منتقل می‌شود و یکی می‌ماند.

در ۳ شیء، یک دسته‌ی ۳ تایی هست که به مرتبه‌ی بعدی می‌رود و صفر تا می‌ماند.

پس

(۱۲۰)$_{۳}$+(۲۰۲)$_{۳}$+(۱۲۱۱)$_{۳}$ =(۱۰۰۱۰)$_{۳}$

حالا که با جمع در مبناهای دیگر تا حدودی آشنا شدید، بد نیست بدانید تفریق نیز در همه‌ی مبناها، دقیقاً از همان اصولی تبعیت می‌کند که در تفریقِ اعداد در مبنای ده‌دهی وجود دارد.



برای روشن‌تر شدن منظورم، مثالی می‌زنم:

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که حاصلِ $(۴۲۱)_{۵}-(۱۰۱)_{۵}$ در مبنای ۵ چیست؟ باز هم یک راه طولانی و خسته‌کننده این است که ببینیم در مبنای ده‌دهی، مقدارهای $(۴۲۱)_{۵}$ و $(۱۰۲)_{۵}$ چه‌قدر هستند و آن‌ها را در مبنای اما راه سریع‌تر این است که اصلاً در مبنای ۵ فکر کنیم:

$$\begin{array}{r} (۴۲۱)_{۵} \\ -(۱۰۱)_{۵} \\ \hline (۳۲۰)_{۵} \end{array}$$

دیدید چه سریع به جواب رسیدیم؟!

البته همیشه به این راحتی نیست. به‌خصوص زمانی که رقم بزرگ‌تر باید از رقم کوچک‌تر کم شود؛ مثل:

$(۴۲۰)_{۵}-(۱۰۱)_{۵}$

در این مثال، در مرتبه‌ی یکی‌ها، باید ۱ دانه را از صفر دانه برداریم! (یک کار غیرممکن!) اما هر مشکلی راه‌حلی دارد. درست مثل تفریق عادی، باید از مرتبه‌ی بالاتر، یک دسته را باز کنیم و به این مرتبه بدهیم. اگر از دو تا دسته‌ی مرتبه‌ی قبل در عدد $(۴۲۰)_{۵}$، یکی را برداریم، ۱ می‌ماند. اگر گفتید به صفر تا، چندتا اضافه می‌شود؟ بله درست است: ۵تا، زیرا در مبنای ۵، داخل هر دسته شیء وجود دارد (مثل مبنای ده‌دهی که در هر دسته، ۱۰تا شیء می‌گذاریم). پس

$(۴۱۵)_{۵}=(۴۲۰)_{۵}$

حالا می‌توانیم تفریق را به راحتی انجام دهیم:

$$\begin{array}{r} (۴۱۵)_{۵} \\ -(۱۰۱)_{۵} \\ \hline (۳۱۴)_{۵} \end{array}$$

حال تفریق زیر را شما انجام دهید:

$$\begin{array}{r} (۶۱۲)_{۸} \\ -(۴۴۳)_{۸} \\ \hline \end{array}$$

اگر درست انجام دهید، به مقدارِ $(۱۴۷)_{۸}$ می‌رسید. دلیل آن‌ها را در شکل زیر می‌بینید:

$$\begin{array}{rrr} ۵ & \overset{۰}{۸} & ۱۰ \\ (\cancel{۶} & \cancel{۱} & \cancel{۲})_{۸} \\ -(۴ & ۴ & ۳)_{۸} \\ \hline (۱ & ۴ & ۷)_{۸} \end{array}$$

امیدوارم از یاد گرفتن جمع و تفریق در مبناهای دیگر، لذت برده باشید. راستی، نگفتید ۵۷+۲۴ چند می‌شود؟!